

Hadronenphysik im endlichen Volumen

Akaki Rusetsky, Universität Bonn

KHuK Jahrestagung, 2. Dezember 2016, Bad Honnef



- Einleitung: Streuprozesse auf dem Gitter
- Streuung mit gekoppelten Kanälen
- Matrixelemente mit Resonanzen
- Drei (und mehr) Teilchen im endlichen Volumen
- Zusammenfassung & Perspektiven

Stabile Teilchen in der Gitterfeldtheorie

Die Zweipunktfunktion → Spektrum

$$C_{\mathbf{p}}(t) = \int dU d\psi d\bar{\psi} e^{-S_{QCD}(U, \psi, \bar{\psi})} \mathcal{O}_{\mathbf{p}}(t) \mathcal{O}_{\mathbf{p}}^{\dagger}(0) \rightarrow Z_{\mathbf{p}} \exp(-E(\mathbf{p})t)$$

Die Dreipunktfunktion → Formfaktoren

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}(t, t') &= \int dU d\psi d\bar{\psi} e^{-S_{QCD}(U, \psi, \bar{\psi})} \mathcal{O}_{\mathbf{p}}(t) j_{\mu}(0) \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{\dagger}(t') \\ &\rightarrow Z_{\mathbf{p}}^{1/2} Z_{\mathbf{q}}^{1/2} \exp(-E(\mathbf{p})|t| - E(\mathbf{q})|t'|) \langle p | j_{\mu}(0) | q \rangle \end{aligned}$$

Das Verfahren kann nicht angewendet werden für:

Resonanzen, z.B., die Masse und Breite des ρ -Mesons, ...
Resonanzen entsprechen nicht isolierten Energieniveaus des Gitter-Hamiltonians!

Zerfälle, z.B., $K \rightarrow 2\pi$, $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$...

Das Lüscher-Verfahren für Streuprozesse

M. Lüscher, Les Houches (1988); NPB 364 (1991) 237, ...

Die Lüscher-Gleichung für elastische Streuung:

- Die Länge des Kastens L ist viel größer als die Reichweite R der Wechselwirkung \rightarrow
Die Streuphasen aus den Gitter-Energieniveaus

$$\det (\delta_{ll'} \delta_{mm'} - \tan \delta_l(p) \mathcal{M}_{lm,l'm'}) = 0$$

- $\mathcal{M}_{lm,l'm'}$: lineare Kombination der Z_{lm} [Partialwellenmischung]

$$Z_{lm}(1, q^2) = \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{n})}{(\mathbf{n}^2 - q^2)^s}, \quad q = \frac{pL}{2\pi}$$

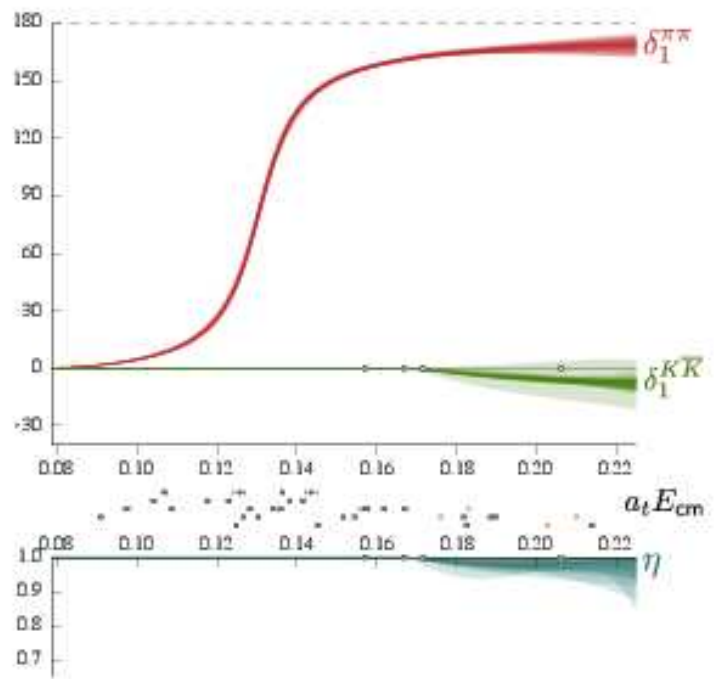
- Verwende eine Parameterisierung der Streuphase (z.B. die ERE), um den Resonanzpol in der komplexen Ebene zu finden
- Eine Alternative – HAL QCD Verfahren:
Hadronenpotential \rightarrow Phasenverschiebung

Verallgemeinerung: mehrere Kanäle

V. Bernard, M. Lage, U.-G. Meißner and AR: 2009, 2011

Verwende den *K*-Matrix-Formalismus in den Fits

C. Liu, X. Feng, S. He: 2005, 2006; M. T. Hansen, S. R. Sharpe: 2012; R. A. Briceño, Z. Davoudi: 2012; N. Li, C. Liu: 2013; P. Guo, J. Dudek, R. Edwards, A. P. Szczepaniak: 2013 ...



Hadron Spectrum Collaboration
PRD 92 (2015) 094502

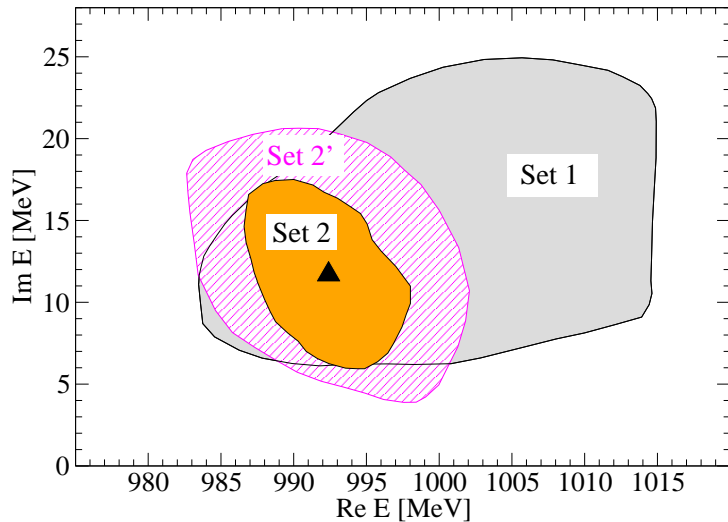
$$K_{ij}(s) = \frac{g_i g_j}{s - s_0} + \text{Polynom}$$

ρ -Meson-Pol bei: $780(3) - \frac{i}{2} 90(8)$ MeV

Hadron Spectrum collaboration 2014-2016:
Streuung in den ρ , a_0 , σ -Meson-Kanälen

Unitäre chirale Störungstheorie im endlichen Volumen

M. Döring, U.-G. Meißner, E. Oset and AR, EPJA 47 (2011) 139



f_0 -Meson-Pol aus synthetischen Daten

Von Vorteil: benutze **twisted b.c.**

Die Distanz zwischen f_0 und $K\bar{K}$ -Schwellen kann variiert werden

Extraktion des a_0 -Meson-Pols:

Z.-H. Guo et al, arXiv:1609.08096

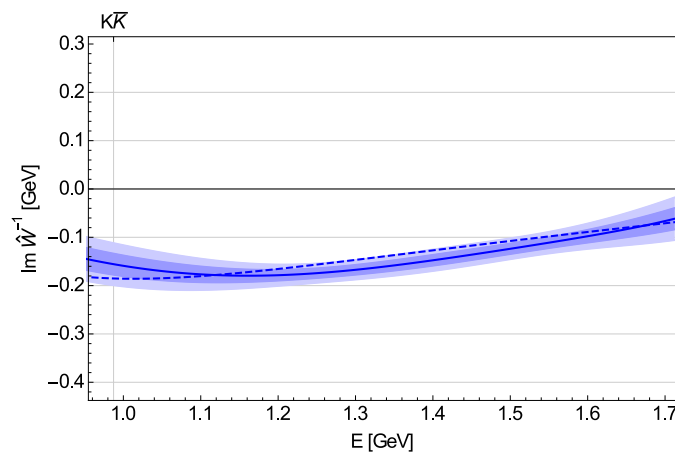
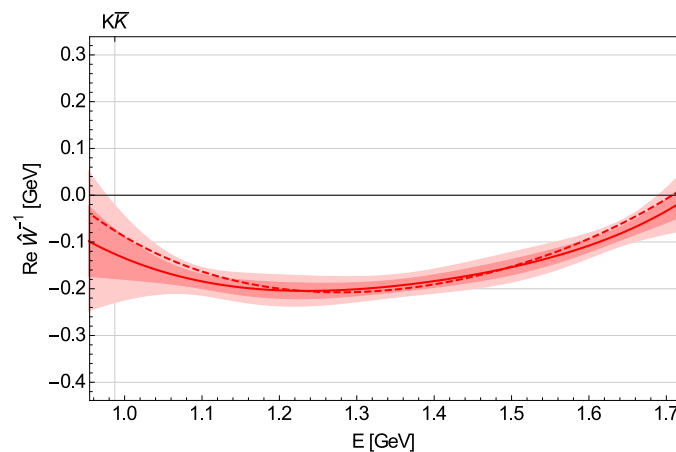
In bestimmten Streukanälen, kann das “Twisting” sogar in Anwesenheit der Quarkannihilationsdiagramme durchgeführt werden

D. Agadjanov, U.-G. Meißner and AR, JHEP 1401 (2014) 103

Verallgemeinerung: optisches Potential

D. Agadjanov, M. Döring, M. Mai, U.-G. Meißner and AR, JHEP 1606 (2016) 043

- Inelastische Streuung: primärer Kanal + sekundäre Kanäle
- Optisches Potential: Phasenverschiebung in dem primären Kanal + Inelastizität
- Könnte aus den Gitter-Daten extrahiert werden mit Hilfe der analytischen Fortsetzung $E \rightarrow E + i\varepsilon$
- Das Verfahren kann sogar für die Zwischenzustände mit mehreren Teilchen angewendet werden



Wechselwirkung im Endzustand: endliches Volumen

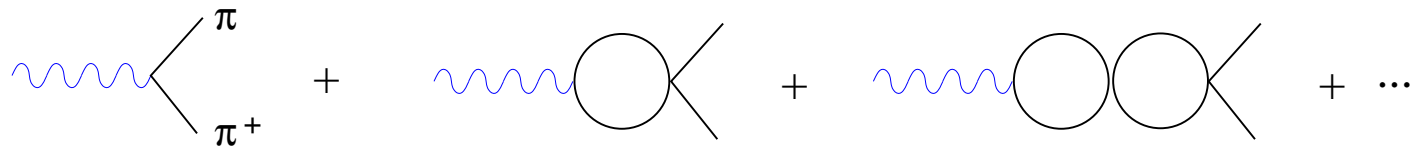
$K \rightarrow 2\pi$ -Zerfall: M. Lüscher and L. Lellouch, Comm. Math. Phys. 219 (2001) 31



$$\hookrightarrow |\langle \pi\pi l | H_w | K \rangle|^2 = \frac{|A^\infty|^2}{8\pi} \left(\frac{p}{M_K} \right)^3 \frac{1}{p\delta'(p) + q\phi'(q)}$$

Mehrere Kanäle: M. Hansen and S. Sharpe, PRD 86 (2012) 016007

Zeitartiger e.m. Formfaktor des Pions: H. Meyer, PRL 107 (2011) 072002



$$|F_\pi(E)|^2 = \left(q\phi'(q) + k \frac{\partial \delta_1(k)}{\partial k} \right) \frac{3\pi E^2}{2k^5} |A_\psi^L|^2$$

NREFT: vom endlichen zum unendlichen Volumen

Beispiel: $\Delta N \gamma^*$ -Übergang

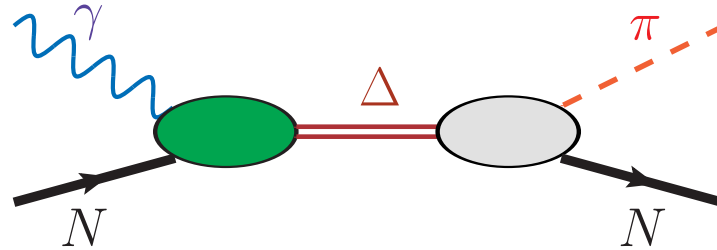
A. Agadjanov, V. Bernard, U.-G. Meißner and AR, NPB 886 (2014) 1199

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NR} = & N^\dagger 2w_N (i\partial_0 - w_N) N + \pi^\dagger 2w_\pi (i\partial_0 - w_\pi) \pi \\ & + C_0 N^\dagger N \pi^\dagger \pi + X_i (\mathcal{O}_i^\dagger N \pi + \text{h.c.}) + \text{Ableitungsterme} \end{aligned}$$

- ↪ Impulse $p \sim L^{-1} \ll M_\pi$, nicht-relativistische EFT anwendbar
- ↪ Photoproduktionsamplitude in NREFT im endlichen und unendlichen Volumen ausrechnen (die gleiche Lagrangedichte)
- ↪ Die Relation zwischen den zwei Größen

$$\mathcal{A}_i(p_n, |\mathbf{Q}|) = e^{i\delta(p_n)} V^{1/2} \left(\frac{1}{|\delta'(p_n) + L/2\pi \phi'(q_n)|} \frac{p_n^2}{2\pi} \right)^{-1/2} |F_i(p_n, |\mathbf{Q}|)|$$

Fortsetzung der Matrixelemente zum Resonanzpol



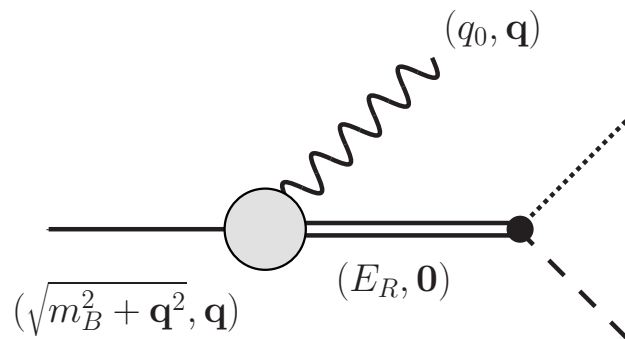
$$i \int d^4x e^{iPx} \langle 0 | T \Delta(x) \bar{\Delta}(0) | 0 \rangle \rightarrow \frac{Z_R}{s_R - P^2}$$

$$i^2 \int d^4x d^4y e^{iPx - iQy} \langle 0 | T \Delta(x) J(0) \bar{N}(y) | 0 \rangle \rightarrow \frac{Z_R^{1/2}}{s_R - P^2} \langle \Delta | J(0) | N \rangle \frac{Z_N^{1/2}}{m_N^2 - Q^2}$$

- Der Formfaktor auf der reellen Achse ist prozessabhängig wegen der Präsenz des Hintergrunds
- Die analytische Fortsetzung zum Resonanzpol ist notwendig und eindeutig
- Wie führt man die analytische Fortsetzung auf dem Gitter durch?

Virtualität des Photons

- Die analytische Fortsetzung könnte durchgeführt werden mit Hilfe der Parametrisierung der Matrixelemente auf der reellen Achse als Polynome im Impulsraum (ERE für die Matrixelemente)



$$q^2 = (E_R - \sqrt{m_B^2 + \mathbf{q}^2})^2 - \mathbf{q}^2$$

komplex!

- Ein reelles q^2 im Limes $s \rightarrow E_R^2$ entspricht **nicht** dem Resonanzpol!

V. Bernard, D. Hoja, U.-G. Meißner and AR, JHEP 1209 (2012) 023

A. Agadjanov et al., NPB 886 (2014) 1199, NPB 910 (2016) 387

Extrapolation zum Pol mit echten Gitterdaten:

R. Briceno et al., PRD 93 (2016) 114508

Drei (und mehr) Teilchen im endlichen Volumen

Problem: die Volumenabhängigkeit der Observablen in Systemen mit mehreren Teilchen

- Eigenschaften bestimmter Resonanzen (z.B. ω -Meson, Roper-Resonanz)
- Kernphysik aus der Gitter-QCD

K. Polejaeva and AR, EPJA 48 (2012) 67

P. Guo, arXiv:1303.3349 [hep-lat]

R. A. Briceño and Z. Davoudi, PRD 87 (2013) 094507

M. Hansen and S. Sharpe, arXiv:1311.4848; PRD 11 (2014) 116003; PRD 92 (2015) 114509; PRD 93 (2016) 014506; PRD 93 (2016) 096006; arXiv:1609.04317

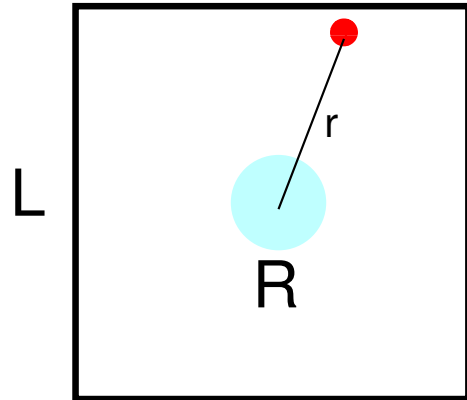
S. Bour *et al.*, PRD 84 (2011) 091503; PRC 86 (2012) 034003

S. Kreuzer *et al.*, PLB 673 (2009) 260; EPJA 43 (2010) 229; PLB 694 (2011) 624

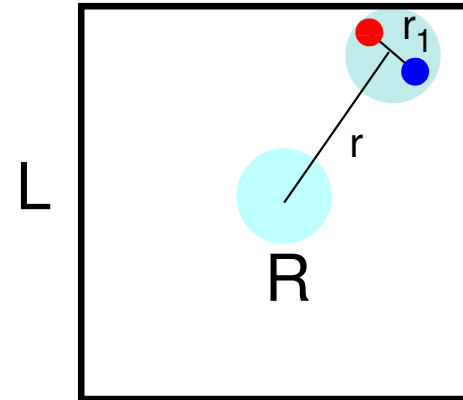
S. König *et al.*, PRL 107 (2011) 112001, Ann. Phys. 327 (2012) 1450

U.-G. Meißner, G. Rios and AR, PRL 114 (2015) 9, 091602

Physikalische Hintergründe



2 particles



3 particles

- 2 Teilchen: $r \gg R$, falls die Teilchen sich in der Nähe der Wände befinden
- 3 Teilchen: es kann sein, dass $r \gg R$, $r_1 \simeq R$, falls die Teilchen sich in der Nähe der Wände befinden

Ist das 3-Teilchen-Spektrum im endlichen Volumen nur durch die (on-Shell) S -Matrixelemente im unendlichen Volumen bestimmt?

Die wichtigsten Ergebnisse

- Die 3-Teilchen Energieniveaus im endlichen Volumen sind durch die **on-Shell** Streumatrixelemente im unendlichen Volumen bestimmt: K. Polejaeva and AR, EPJA 48 (2012) 67
- Bestätigt auch in M. Hansen and S. Sharpe, PRD 90 (2014) 11, 116003:
Quantisierung des Spektrums des Dreiteilchensystems
- Eine Verschiebung der Energie des **Dreiteilchenbindungszustandes** im endlichen Volumen:
U.-G. Meißner, G. Rios and AR, PRL 114 (2015) 091602.
Bestätigt und erweitert in M. Hansen and S. Sharpe, arXiv:1609.04317; R. Briceno, M. Hansen and S. Sharpe, arXiv:1609.09805

$$\Delta E = \textit{const} \cdot (\kappa^2/m)(\kappa L)^{-3/2} \exp(-2\kappa L/\sqrt{3}) + \dots$$

Die Quantisierungsbedingung im Dreiteilchenfall ist extrem kompliziert und könnte in dieser Form nicht unmittelbar für die Analyse der Gitterdaten benutzt werden

Zusammenfassung & Perspektiven

- EFT ist besonders geeignet für die **Extraktion der hadronischen Observablen aus den Gitter-Daten im endlichen Volumen** zu Verfügung
- Die Analyse der Systeme mit gekoppelten Kanäle hat in der letzten Jahren Fortschritte gemacht. Für die Zukunft wäre es empfehlenswert, mehr Simulationen mit **Twisted Boundary Conditions** durchzuführen
- Es gibt schon die ersten Versuche, die Matrixelemente am Resonanzpol zu bestimmen. Es wäre interessant, die Matrixelemente, die für die **B-Physik** relevant sind, auch mit Hilfe derselben Methode zu bestimmen
- Der bestehende Dreiteilchen-Formalismus ist unhandlich und nicht für die Datenanalyse geeignet. Eine Umformulierung des Zugangs, ggf mit Hilfe des **Teilchen-Dimer-Formalismus**, wäre vorteilhaft
- Es wäre besonders wichtig, ein Analogon der **Lüscher-Lellouch-Formel für die Dreiteilchenzerfälle** herzuleiten